Διαφορικές Εξισώσεις 1 (3) 13/03/18

για κάθε $(t_0,x_0)\in V$ οπότε η F είναι τοπικά Lipschitz

Σημείωση: Οι παραπάνω προτάσεις μας είναι ικανές συνθήκες

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $F(t,x)=4t^2+x^2$ ορισμένη στο σύνολο $V=\{(t,x): |t|\leq 1, |x|\leq 1\}\subseteq \mathbb{R}^2$. Να εξετάσετε εάν η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο V

απάντηση

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=2x$ είναι συνεχής στο V, και επιπλέον

$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| = |2x| = 2|x| \leq 2$

Άρα $\frac{\partial F}{\partial x}$ φραγμένη.

Επιπλέον, V είναι κυρτό σύνολο, εφόσον για $s\in[0,1]$ ισχύει ότι αν $(t_1,x_1)\in V$ και $(t_2,x_2)\in V$, τότε $s(t_1,x_1)+(1-s)(t_2,x_2)=$
$(st_1+(1-s)t_2, sx_1+(1-s)x_2)$, οπότε εφόσον
$|st_1+(1-s)t_2| \leq s|t_1|+(1-s)|t_2| \leq s\cdot 1+(1-s)\cdot 1 = 1$
και $|sx_1+(1-s)x_2| \leq \dots \leq 1$ έπεται ότι και
$s(t_1,x_1)+(1-s)(t_2,x_2)\in V$

Άρα η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο V

Άσκηση: Ν.δ.ο. αν $R_1=\{(t,x): |t|\leq 1, [redacted] x\in\mathbb{R}\}$ και $F: R_1\to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(t,x)=\begin{cases} x(3t+1), & \text{αν } t\geq 0 \\ x(2t-1) & \text{αν } t<0 \end{cases}$$

τότε η F πληροί την συνθήκη Lipschitz στο R_1

<u>απάντηση</u> $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \begin{cases} 3t-1, & t \geq 0 \\ 2t-1, & \text{αν } t<0 \end{cases}$

Οπότε [redacted] $\lim\limits_{t\to 0^+}(3t-1) = -1 = \lim\limits_{t\to 0^-}(2t-1)$

Αρα $\frac{\partial F}{\partial x}$ συνεχής στο R_1 και [redacted] επιπλέον

εφόσον $|t| \leq 1$, $\forall (t,x) \in R_1$ έχουμε για $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right| = |3t-1| \leq 3|t|+1 \leq 3+1 = 4$$

Για $t<0$ έχω $\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| = |2t-1| \leq 2|t|+1 \leq 3$

Αρα $\frac{\partial F}{\partial x}$ φραγμένη στο R_1

Επιπλέον R_1 κυρτό υποσύνολο τα R^2, οπότε η F πληροί τη συνθήκη Lipschit στο R_1

- Εαν $D \subset R \times R^n$ και $F: D \to R^n$ και [redacted] $(x_0, y_0) \in D$ [redacted] Τότε έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

1) Εαν a, b θετικοί αριθμοί και τέτοιοι ώστε $R_1 = \{(t,x) : |t-t_0| \leq a$ και $|x-x_0| \leq b\} \subseteq D$ και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R_1, τότε η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο R_1

2) Εαν a θετική σταθερά τέτοια ώστε $R_2 = \{(x,y) : |x-x_0| \leq a$ και y αυθαίρετο$\} \subseteq D$ και $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς και φραγμένες στο R_2, τότε η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο R_2.

Άσκηση Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν πληρούν τη συνθήκη Lipschitz στο δοσμένο σύνολο

1) $F(t,x)=t\cdot x^2$, $D_1=\{(t,x): |t|\le 1, x\in R\}$

απάντηση

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F πληροί την συνθήκη Lipschitz στο D_1 με σταθερά Lipschitz $L>0$. Τότε $|F(t,x)-F(t,y)|\le L|x-y|$ $\forall (t,x),(t,y)\in D$

Έστω λοιπόν $\delta>0$ και $(1,\delta)$ επίσης $(1,\frac{\delta}{2})\in D$

τότε $|F(1,\delta)-F(1,\frac{\delta}{2})|\le L|\delta-\frac{\delta}{2}|$ ή

$\delta^2-\frac{\delta^2}{4}\le L\cdot\frac{\delta}{2}$ ή $\frac{3}{4}\delta^2\le L\frac{\delta}{2}$ ή

$\frac{3}{2}\delta\le L$ άτοπο

2) $F(t,x)=e^t\cdot x^{2/3}$, $D=\{(t,x): |t|\le 1, |x|\le 1\}$

Να δειχθεί ότι δεν πληροί την συνθήκη Lipschitz στο D

απάντηση

Υποθέτουμε ότι η F πληροί την συνθήκη Lipschitz στο D με σταθερά Lipschitz $L>0$. Τότε

$|F(t,x)-F(t,y)|\le L|x-y|$, $\forall (t,x),(t,y)\in D$

Έστω $\delta\in(0,1]$, τότε $(0,\delta)$ και το $(0,0)$ είναι στοιχεία του D και άρα $(\in D)$ έπεται $(\in D)$

$|F(0,\delta)-F(0,0)|\le L|\delta-0|$ ή $\delta^{2/3}\le L\delta$ ή

$1\le L\cdot\delta^{1/3}$ (άτοπο)

Αυτό θα έπρεπε να ισχύει για $0<\delta<1$

Άρα η f δεν είναι Lipschitz στο σύνολο D

Θεώρημα ([illegible] λύσεων π.α.τ.)

Έστω $I=[a,b]\subseteq R$ και $V\subseteq R^n$

και $F: I\times V \to \mathbb{R}^n$ συνεχής η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz στο $I\times V$, τότε υπάρχει το <u>πολύ</u> μία λύση της Δ.Ε.

$$u'(t) = F(t,u(t)) \text{ με αρχική συνθήκη } u(t_0)=c \in V$$

<u>Άσκηση</u> Έστω $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $a>0$ και $[-a,a]\subseteq\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=|x|$. Να εξετάσετε εάν η f πληροί την συνθήκη Lipschitz στο $[-a,a]$.

<u>Απάντηση</u>

Εάν $x,y\in[-a,a]$: $|f(x)-f(y)| = \big||x|-|y|\big| \le |x-y|$

$|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ $\Rightarrow$ Άρα η f πληροί την συνθήκη Lipschitz με $L=1>0$

Η f είναι συνεχής στο $[-a,a]$, [redacted] και η παράγωγος της στο $x_0=0$

$$f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x\le 0 \end{cases}$$

δεν υπάρχει

<u>Άσκηση</u> Έστω $F:[-1,1]\times[-a,a]\to\mathbb{R}$, $a>0$ με $F(t,x)= t+|x|$. Lipschitz και στη συνέχεια Εξετάστε αν η F είναι [redacted] ύπαρξη της $\frac{\partial F}{\partial x}$ στο εξετάστε ως προς την [redacted] $[-1,1]\times[-a,a]$

$$\left(\exists L>0:\ |F(t,x)-F(t,y)|\le L|x-y|,\ \forall (t,x),(t,y)\in I\times V \right.$$

$\Leftrightarrow$ F πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x, ομοιόμορφα ως προς t)

Άσκηση Έστω $F:(X,\|\cdot\|_1)\to(Y,\|\cdot\|_2)$, $t\mapsto F(t)$

ν.δ.ο. αν η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στον X, τότε F είναι ομοιόμορφα συνεχής

Εφόσον F πληροί την ομοιόμορφη συνθήκη Lipschitz στον X, έπεται $\exists\, L>0$, τέτοιο ώστε

$\|F(t_1)-F(t_2)\|_2 \le L\|t_1-t_2\|_1$,

Έστω $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, τότε

για $\|t_1-t_2\|<\delta$ έχουμε

$\|F(t_1)-F(t_2)\|_2 \le L\|t_1-t_2\|_1 < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \Rightarrow$

$\|F(t_1)-F(t_2)\|_2 < \varepsilon, \ \forall\, t_1,t_2\in X$.

Άρα δείξαμε το ζητούμενο

Άσκηση: Έστω $F: I\times V\to\mathbb{R}$, όπου $I=[0,2]$ και $V=\mathbb{R}$

$$F(t,x)=\begin{cases} 2x-t, & 0\le t\le 1, \ x\in\mathbb{R} \\ t+2x, & 1<t\le 2, \ x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι η F πληροί την συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο $I\times V$

ii) Είναι η F συνεχής;

$$|F(t,x)-F(t,y)| = \begin{cases} |-t+2x+t-2y|, & 0\le t<1 \\ |t+2x-t-2y|, & 1<t\le 2\end{cases}$$

$\Rightarrow |F(t,x)-F(t,y)| = 2|x-y|, \ \forall\, (t,x)\in[0,2]\times\mathbb{R}$

Άρα η F πληροί την συνθήκη Lipschitz στο $I \times L$

Ν.δ.ο. η F δεν είναι συνεχής

Ισχύει ότι $\left(\frac{\nu-1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} (1,0)$ και

$\left(\frac{\nu+1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} (1,0)$

Όμως $F\left(\frac{\nu-1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1-\nu}{\nu} + \frac{2}{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} -1$ και

$F\left(\frac{\nu+1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\nu+1}{\nu} + 2\frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} = 1$

Άρα η F δεν είναι συνεχής.

Απόδειξη του Θεωρήματος του μοναδικότητος

Θεώρημα (για μοναδικότητα λύσεων)

Έστω $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n$ και $F: I \times V \to \mathbb{R}^n$

$(t,x) \mapsto F(t,x)$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (ως προς τη μεταβλητή x στο σύνολο $I \times V$) με σταθερά Lipschitz $L > 0$, τότε υπάρχει το ~~πολύ~~ μία λύση της δ.ε. $u'(t) = F(t, u(t))$, $a \le t \le b$ με αρχική συνθήκη $u(t_0) = c \in V$.

Απόδειξη

Εφόσον η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz (ως προς x στο $I \times V$) $\exists L > 0$ τ.ω.

$|F(t,x) - F(t,y)| \le L|x-y| \quad \forall (t,x),(t,y) \in I \times V$

Υποθέτουμε ότι $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ και $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$ είναι λύσεις του π.α.τ.

Τότε $u(t_0) = v(t_0) = c$. Ορίζουμε $\sigma(t) = |u(t) - v(t)|^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} (u_i(t) - v_i(t))^2 \geq 0$$

Ισχύει $\sigma(t_0) = |u(t_0) - v(t_0)|^2 = |c - c|^2 = |0| = 0$

Οι u, v είναι παραγωγίσιμες εφόσον ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση, οπότε και η σ είναι παραγωγίσιμη με

$$\sigma'(t) = 2 \sum_{i=1}^{n} (u_i(t) - v_i(t))(u_i'(t) - v_i'(t))$$

Αλλά εφόσον u, v ικανοποιούν την Δ.Ε.
$u'(t) = f(t, u(t)) = (f_1(t, u(t)), \ldots, f_n(t, u(t)))$
και $v'(t) = f(t, v(t)) = (f_1(t, v(t)), \ldots, f_n(t, v(t)))$

Οπότε $\sigma'(t) = 2 \sum_{i=1}^{n} (u_i(t) - v_i(t))(u_i'(t) - v_i'(t))$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} (u_i(t) - v_i(t)) (f_i(t, u(t)) - f_i(t, v(t)))$$

$$= 2 \langle f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle$$

Οπότε $\sigma'(t) \leq |\sigma'(t)| \leq 2 |\langle f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle| \leq 2 \|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\| \|u(t) - v(t)\|$

Αλλά η f είναι Lipschitz

Άρα $\sigma'(t) \leq 2L \|u(t) - v(t)\|^2$

Δηλαδή $\sigma'(t) \leq 2L\sigma(t)$ (*)

Άρα $\frac{d}{dt}(\sigma(t) e^{-2Lt}) = \sigma'(t) e^{-2Lt} - 2L e^{-2Lt} \sigma(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sigma(t) e^{-2Lt}) \leq 0$ (**)

Άρα για $t \geq t_0$ η απεικόνιση

$t \mapsto \sigma(t)e^{-2Lt}$ είναι φθίνουσα

Άρα έχουμε ότι $\sigma(t)e^{-2Lt} \le \sigma(t_0)e^{-2Lt_0}, \forall t \ge t_0$

$\Rightarrow \sigma(t) \le 0, \forall t \ge t_0$

Άρα $\sigma(t)=0, \forall t \ge t_0$

$\Rightarrow u(t)=v(t), \forall t \ge t_0$

Εάν τώρα $t \le t_0$, έχουμε $-\sigma'(t) \le |\sigma'(t)| \overset{(*)}{\le} 2L\sigma(t)$

Άρα $\sigma'(t)+2L\sigma(t) \ge 0, \forall t \le t_0$

Άρα $\frac{d}{dt}\left(\sigma(t)e^{2Lt}\right) \ge 0, \forall t \le t_0$

Άρα η απεικόνιση $t \mapsto \sigma(t)e^{2Lt}$ είναι αύξουσα για $t \le t_0$

Οπότε $0 \le \sigma(t)e^{2Lt} \le \sigma(t_0)e^{2Lt_0} = 0$

Άρα $\sigma(t)=0, \forall t \le t_0 \Rightarrow u(t)=v(t), \forall t \le t_0$

Δηλαδή $u(t)=v(t), \forall t \in [a,b]$

Άρα δείξαμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ του Gronwall

Εάν u, v είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα κλειστό αριστερά διάστημα J με αριστερό άκρο x_0. Ακόμη ας είναι M μια πραγματική σταθερά και ας υποθέσουμε ότι v είναι μη αρνητική συνάρτηση στο J.

Εάν $u(x) \le M + \int_{x_0}^{x} v(t)u(t)\,dt$, για $x \in J$, τότε

$u(x) \le M \exp\left[\int_{x_0}^{x} v(t)\,dt\right]$, για κάθε $x \in J$

απόδειξη: Θέτουμε $z(x)=\int_{x_0}^{x} v(t)u(t)\,dt$, εφόσον u, v είναι συνεχείς στο J η z είναι παραγωγίσιμη

και $z'(x)=v(x)u(x)$ (1), λόγω της αρχικής υπόθεσης έχουμε $u(x)\le M+z(x)$, $x\in J$ (2). Επομένως από τη σχέση (1) λόγω της (2) (και εφόσον $v(x)\ge 0$)

$$z'(x)=v(x)u(x)\le v(x)\cdot(M+z(x))=M\,v(x)+v(x)z(x)$$

Άρα $z'(x)-v(x)z(x)\le M\,v(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(z(x)e^{-\int_{x_0}^{x}v(t)dt}+Me^{-\int_{x_0}^{x_0}v(t)dt}\right)\le 0$$

$$\Rightarrow \left(z(x)e^{-\int_{x_0}^{x}v(t)dt}\right)'\le\left(-Me^{-\int_{x_0}^{x}v(t)dt}\right)'$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x}\left(z(u)e^{-\int_{x_0}^{u}v(t)dt}\right)'du\le\int_{x_0}^{x}\left(-Me^{-\int_{x_0}^{u}v(t)dt}\right)'du,\ \cancel{t\ge x_0}$$

$$\Rightarrow z(x)e^{-\int_{x_0}^{x}v(t)dt}-\underbrace{z(x_0)}_{=0}\le -Me^{-\int_{x_0}^{x}v(t)dt}+M$$

$$\Rightarrow z(x)+M\le Me^{\int_{x_0}^{x}v(t)dt}$$

$$\Rightarrow u(x)\le\int_{x_0}^{x}u(t)v(t)dt+M\le Me^{\int_{x_0}^{x}v(t)dt}$$

$$\Rightarrow u(x)\le Me^{\int_{x_0}^{x}v(t)dt}$$

$\Rightarrow u(x) \le M \exp\{\int_{x_0}^{x} v(t)dt\}$ $\quad \forall x \ge x_0$

Άρα έχουμε το ζητούμενο

● **Λήμμα** Εάν u, v είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες σε ένα κλειστό δεξιά διάστημα J με δεξί άκρο x_0. Ας είναι ακόμη M μια πραγματική σταθερά και ας υποθέσουμε ότι v είναι μη αρνητική συνάρτηση στο J. Εάν

$u(x) \le M + \int_{x_0}^{x} v(t)u(t)dt$, για κάθε $x \in J$

τότε $u(x) \le M \exp\{\int_{x}^{x_0} v(t)dt\}$, για όλα τα $x \in J$

απόδειξη όμοια με το Λήμμα Gronwall (ολοκληρώνοντας όμως από x έως x_0)

Λήμμα Reid Έστω u, v συνεχείς πραγματικές μη αρνητικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα I. Ας είναι επίσης $x_0 \in I$ και M μια πραγματική σταθερά. Αν $u(x) \le M + \left|\int_{x_0}^{x} u(t)v(t)dt\right|$, για κάθε $x \in I$, τότε $u(x) \le \exp \left|\int_{x_0}^{x} v(t)dt\right|$

~~Απόδειξη του μονοσήμαντου με χρήση του Λήμματος Reid~~

● (Σχεδιάγραμμα απόδειξης)

(E) $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(t_0)=u_0$, $f: I \times V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0,u_0) \in I \times V$

f συνεχής, πληροί την συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο $J \times V$. Έχουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς t εφόσον είναι συνεχής και με ολοκλήρωση προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds$

Η ολοκληρωτική εξίσωση ισοδυναμεί με το Π.Α.Τ
Εάν η ολοκληρωτική εξίσωση έχει δύο λύσεις u_1, u_2, τότε $u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, u_1(t))dt$

$$u_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, u_2(t))dt$$

Άρα $|u_1(t) - u_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |F(t, u_1(t)) - F(t, u_2(t))| dt$

$\leq \int_{t_0}^{t} L|u_1(t) - u_2(t)| dt$
Εάν γράψω $u(t) = |u_1(t) - u_2(t)|$
u μη αρνητική και συνεχής

$v(t) = L$, σταθερή και μη αρνητική και από
με εφαρμογή του Reid έχουμε
$|u_1(t) - u_2(t)| \leq 0 \exp\{|\int_{t_0}^{t} L ds|\} \Rightarrow u_1(t) = u_2(t)$
$, \forall t \in I$

Θεώρημα Έστω $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ και V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω επίσης $F: I \times V \to \mathbb{R}^n$ συνεχής η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz (ως προς τη μεταβλητή x στο $I \times V$). Εάν u, v είναι δύο λύσεις της εξίσωσης $u'(t) = F(t, u(t))$ με πεδίο ορισμού το I που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $u(t_0) = u_0$ και $v(t_0) = v_0$, $t_0 \in I$, τότε για κάθε $t \in I$ ισχύει $|u(t) - v(t)| \leq e^{L|t - t_0|} |u_0 - v_0|$
$L >$ στα θέμα Lipschitz

απόδειξη
α' τρόπος Εργαζόμαστε όπως και στην 1η απόδειξη
του μοναδικού του $\delta(t) = |u(t) - v(t)|^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} (u_i(t)-v_i(t))^2 \geq 0$. Ισχύει $\sigma'(t) \leq 2L\sigma(t)$

Άρα $\frac{d}{dt}\left(\sigma(t) e^{-2Lt}\right) \leq 0$

Άρα $t \mapsto \sigma(t) e^{-2Lt}$ φθίνουσα για $t \geq t_0$

οπότε $\sigma(t) e^{-2Lt} \leq \sigma(t_0) e^{-2Lt_0}$

Άρα $\boxed{\sigma(t) \leq \sigma(t_0) \cdot e^{2L(t-t_0)}}$, για $t \geq t_0$

Παρόμοια για $t < t_0$ έχουμε

$\frac{d}{dt}\left(\sigma(t) e^{2Lt}\right) \geq 0$. Άρα $t \mapsto \sigma(t) e^{2Lt}$, αύξουσα $t \leq t_0$

οπότε $\sigma(t) e^{2Lt} \leq \sigma(t_0) e^{2Lt_0}$ ή $\boxed{\sigma(t) \leq \sigma(t_0) e^{2L(t_0-t)}}$

Άρα $\sigma(t) \leq \sigma(t_0) e^{2L|t-t_0|}$, $\forall t \in [a,b]$

$\Rightarrow |u(t)-v(t)|^2 \leq |u(t_0)-v(t_0)|^2 \left(e^{L|t-t_0|}\right)^2$, $\forall t \in I$

$\Rightarrow |u(t)-v(t)| \leq |u(t_0)-v(t_0)| e^{L|t-t_0|}$, $\forall t \in I$

2 τρόπος (Με χρήση του Θεωρήματος Reid και μετατροπή σε α.ε. !

Πόρισμα Θεωρούμε τη συνάρτηση $F: I \times V \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$, F συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (ως προς τη μεταβλητή x στο $I \times V$) και $u(t,c)$ η λύση της εξίσωσης $u'(t) = F(t, u(t))$ με αρχική τιμή $u(t_0, c) = c$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $[t_0 - T, t_0 + T]$, $T > 0$. Τότε η u είναι συνεχής ως προς c και μάλιστα είναι $\lim_{c \to c_0} u(t, c_0) = u(t, c')$ ομοιόμορφα για $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

<u>απόδειξη</u> Αρκεί ν.δ.ο. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$:

$|c - c'| < \delta \Rightarrow |u(t,c) - u(t,c')| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $|u(t,c) - u(t,c')| \le e^{L|t-t_0|}|c - c'| \le e^{2LT}|c - c'|$

Συνεπώς, εάν $\varepsilon > 0$ επιλέγοντας $\delta < \frac{\varepsilon}{e^{2LT}}$ έχουμε

$|u(t,c) - u(t,c')| \le e^{2LT} \cdot \delta = e^{2LT}\frac{\varepsilon}{e^{2LT}} = \varepsilon, \ \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

Η επιλογή του δ είναι ανεξάρτητη του t, δηλ. οπότε η σύγκλιση ομοιόμορφη ως προς $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$